Komplekse tal og rækker

John Olsen

1 Indledning

Dette sæt noter er forelæsningsnoter til foredraget 'Komplekse tal og rækker'. Noterne er beregnet til at blive brugt sammen med foredraget.

I afsnit 2 bliver de fundamentale definitioner givet og, vi viser, at $\mathbb{C}$ er et legeme. I afsnit 3 tolker vi de komplekse tal geometrisk og giver et argument for eksistens. I afsnit 4 udvider vi eksponentialfunktionen til de komplekse tal og skriver et par af egenskaberne ved den op. I afsnit 5 giver vi de mest elementære definitioner og egenskaber ved følger og vi konstruerer rækken for en følge af komplekse tal. I afsnit 6 diskuterer vi den komplekse eksponentialfunktion og Riemanns zeta-funktion. Tilsidst i dette afsnit opskrives den berømte Riemann hypotese. I afsnit 7 giver vi en kort liste over den mest udbredte notation. Håbet er, at det øger læsevenligheden. Sidste afsnit, afsnit 8, er der otte opgaver af varierende sværhedsgrad.

Forudsætningerne for at kunne gå igang med noterne er en vis erfaring med at regne med sin og cos. Hvis man ikke kender til vektorregning, kan man ikke forstå argumentet for eksistens af $\mathbb{C}$ i Bemærkning 3.6, men det er ikke centralt i fremstillingen.

2 De komplekse tals legeme

I dette afsnit vil vi vise, at $\mathbb{C}$, som defineres senere, udgør et legeme. Vi starter med en del indledende definitioner.

Definition 2.1. En *ring*[1], R, er en mængde, der er udstyret med en addition, $+$, og en multiplikation, $\cdot$, så der gælder, at

1. for alle $r, s \in R$ er $r + s \in R$.
2. for alle $r, s \in R$ er $r \cdot s \in R$.
3. addition er kommutativt: $r + s = s + r$ for alle $r, s \in R$.
4. addition er associativt: $(r + s) + t = r + (s + t)$ for alle $r, s, t \in R$.
5. for alle $r \in R$ eksisterer der et $0 \in R$ så $r + 0 = r$.
6. for alle $r \in R$ eksisterer der et $s \in R$ så $r + s = 0$.
7. multiplikation er associativ: $(r \cdot s) \cdot t = r \cdot (s \cdot t)$ for alle $r, s, t \in R$.
8. multiplikation er distributiv: $(r + s) \cdot t = rt + st$ for alle $r, s, t \in R$.
9. for alle $r \in R$ eksisterer der et $1 \in R$, så $r \cdot 1 = 1 \cdot r = r$.

[1] Strengt taget definerer vi en ring med enhed. I disse noter vil vi, når vi skriver ring, mene ring med enhed.

Definition 2.2. Lad R være en ring. R kaldes en *kommutativ ring*[2], hvis der for alle $r, s \in R$ gælder at $r \cdot s = s \cdot r$.

Definition 2.3. Lad R være en ring. Et *legeme* er en kommutativ ring, hvor der gælder, at for alle $r \neq 0 \in R$ eksisterer et $s \in R$, så $rs = 1$. Hvis ringen ikke er kommutativ kaldes den et *skævlegeme*.

Eksempel 2.4. Det tilrådes læseren at tjekke, at alle punkterne i Defintion 2.1 og 2.2 er opfyldt for $\mathbb{Z}$. Det vil sige, at $\mathbb{Z}$ er en kommutativ ring. Endvidere bør læseren tjekke at alle punkterne i Defintion 2.1, 2.2 og 2.3 er opfyldt for $\mathbb{Q}$ og $\mathbb{R}$. Det vil sige, at $\mathbb{Q}$ og $\mathbb{R}$ er legemer.

Vi vil nu motivere en udvidelse af de reelle tal. Man lærer tidligt i skolesystemet metoder til at løse ligninger af typen $ax + b = c$, hvor $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, hvor løsningen selvfølgeligt er $x = (c - b)/a$. Senere i forløbet lærer man, hvorledes man løser ligninger af formen $ax^2 + bx + c = 0$, hvor $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. Løsningen til denne ligning er $x = (-b \pm \sqrt{D})/2a$, hvor $D = b^2 - 4ac$. Ligningen har to løsninger hvis $D > 0$, en løsning hvis $D = 0$ og ingen løsninger, hvis $D < 0$.

Specielt har ligningen $x^2 + 1 = 0$ ingen løsning i de reelle tal. Hvis man uden at tænke over, om det har mening indsætter $\sqrt{-1}$ i ligningen, får man $(\sqrt{-1})^2 + 1 = -1 + 1 = 0$. Det betyder at $\sqrt{-1}$ faktisk løser ligningen!

Det vil sige, at vi søger en ring, R, som har følgende tre egenskaber

1. R er et legeme
2. $\mathbb{R} \subseteq R$
3. $\sqrt{-1} \in R$.

Vi definerer en delmængde af R kaldet $\mathbb{C}$ ved

$$\mathbb{C} = \{x + iy \mid x, y \in \mathbb{R},\ i = \sqrt{-1}\}.$$

Denne delmængde kaldes *de komplekse tal*. Vi vil indtil videre *antage* at en sådan delmængde eksisterer. Et argument for eksistens gives i Bemærkning 3.6.

Definition 2.5. Lad $z = x + iy \in \mathbb{C}$ være et komplekst tal. x kaldes for realdelen af z og y kaldes for imaginærdelen af z. Real- og imaginærdel betegnes henholdsvis $\Re(z)$ og $\Im(z)$.

For at gøre $\mathbb{C}$ til en ring, skal vi definere en addition og en multiplikation på $\mathbb{C}$.

Definition 2.6. Lad $z, w \in \mathbb{C}$ være givet ved $z = x + iy$ og $w = a + ib$. Da er

- $z + w = (x + a) + i(y + b)$
- $zw = (x + iy)(a + ib) = xa - yb + ixb + iya = (xa - yb) + i(xb + ya)$.

Observation 2.7. Da $i0 = 0$, ses det at $\{x + i0 \mid x \in \mathbb{R}\} = \{x \mid x \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}$, det betyder, at $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$.

Før vi kan se, at $\mathbb{C}$ er et legeme, skal vi have nogle flere regneregler på banen.

[2]Strengt taget definerer vi en kommutativ ring med enhed. I disse noter vil vi, når vi skriver kommutativ ring, mene kommutativ ring med enhed.

Definition 2.8. Lad $z, w \in \mathbb{C}$ være givet ved $z = x + iy$ og $w = a + ib$. Da er

- $z - w = (x - a) + i(y - b)$
- $z/w = (x + iy)/(a + ib) = (x + iy)(a - ib)/(a + ib)(a - ib)$
  $= ((xa + yb) + i(ya - xb))/(a^2 + b^2)$, $w \neq 0$
- $1/z = (x - iy)/(x^2 + y^2)$, $z \neq 0$

Bemærkning 2.9. I definitionen af multiplikation og division skal man frem for at memorere slutformlen i højere grad huske på, hvordan den er udledt.

Definition 2.10. Lad $z \in \mathbb{C}$ være et komplekst tal givet ved $z = x + iy$. Da er *længden* eller *normen* af z givet ved $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Nu kan vi formulere den første vigtige sætning.

Sætning 2.11. $\mathbb{C}$ *er et legeme.*

Bevis. Vi skal vise at punkterne 1-9 i Definition 2.1, Definition 2.2 og Definition 2.3 er opfyldt. Punkt 1 og 2 er oplagte per konstruktion af $+$ og $\cdot$. Punkterne 3 og 4 følger af de tilsvarende egenskaber for reelle tal.

For at vise at punkt 5 og 9 er opfyldt lader vi $z \in \mathbb{C}$, $z = x + iy$ være vilkårlig. Hvis vi sætter $0 = 0 + i0$ er $z + 0 = z$. Hvis vi sætter $1 = 1 + i0$, ses det, at $1z = z1 = z$.

For at vise at punkt 6 er opfyldt lader vi $z \in \mathbb{C}$, $z = x + iy$ være vilkårlig. Vi ser at $-z = -x - iy$ opfylder at $z + (-z) = 0$. Punkt 7 og 8 vises ved en direkte udregning, der overlades til læseren.

Nu har vi vist, at $\mathbb{C}$ er en ring. Vi skal vise, at $\mathbb{C}$ er en kommutativ ring. Lad $z, w \in \mathbb{C}$ og lad $z = x + iy$ og $w = a + ib$. Da er $zw = (xa - yb) + i(xb + ya)$, men da $x, y, a, b \in \mathbb{R}$ er $xa = ax$, $yb = by$, $xb = bx$ og $ya = ay$. Dermed er $zw = (ax + by) + i(bx + ay) = wz$.

Vi skal tilsidst se, at $\mathbb{C}$ er et legeme. Lad $z \in \mathbb{C}$ være vilkårlig og lad $z = x + iy \neq 0$. Da er $1/z = (x - iy)/(x^2 + y^2)$. Det ses, at $z(1/z) = (x + iy)((x - iy)/(x^2 + y^2)) = (x^2 + y^2)/(x^2 + y^2) = 1$. □

Da i åbenlyst er i $\mathbb{C}$, er $\mathbb{C}$ altså vores ønskede udvidelse af $\mathbb{R}$.

Som belønning for vores anstrengelser har vi følgende fantastiske sætning.

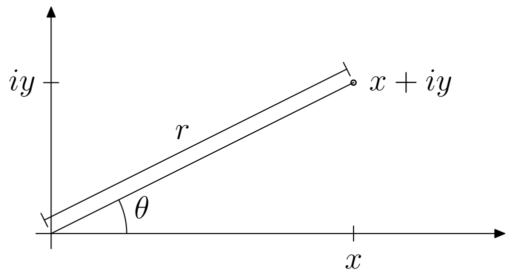
Sætning 2.12 (Algebraens fundamentalsætning). *Lad $a_i \in \mathbb{C}$. Ethvert polynomium af grad n, $a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$, har præcist n komplekse rødder talt med multiplicitet.*

Bevis. Udelades. □

Bemærkning 2.13. Bemærk at Sætning 2.12 intet siger om, hvordan man finder disse rødder. Faktisk kan man vise, at der kun findes en eksplicit løsningsformel for løsning af ligninger af grad mindre end fem! Dette blev vist af den norske matematiker Niels Henrik Abel.

3 Geometrisk fortolkning af $\mathbb{C}$

Casper Wessel, digteren Johan Hermann Wessels bror, var den første til at se tal i $\mathbb{C}$ geometrisk som punkter i planen, det vil sige at se $x + iy$ som vektoren (x, y).



Den komplekse talplan.

Bemærkning 3.1. Der findes en anden måde at opskrive komplekse tal på. Som det ses på figuren er $z = x + iy$ entydigt givet ved talparret (r, θ), hvor $r = |z|$, og hvor θ er vinklen med den positive 1.-akse. Talparret (r, θ) kaldes opskrivningen af z på polarform. r kaldes modulus for z og θ kaldes argumentet for z og betegnes med henholdsvis $|z|$ og $\arg(z)$. Ud fra figuren kan man også se, at $|z|$ er defineret ud fra Pythagoras sætning.

Lad os se, hvorledes man kan oversætte fra den ene til den anden opskrivning. Det formulerer vi i et lemma.

Lemma 3.2. *Lad $z = x + iy$. Da er $\theta = \cos^{-1}(x/r)$ og $\theta = \sin^{-1}(y/r)$. Hvis $z = 0$, er der uendeligt mange vinkler, der bestemmer z. Længden af z er $|z| = r = \sqrt{x^2 + y^2}$.*

Hvis vi har z opskrevet som (r, θ) er $x = r\cos\theta$ og $y = r\sin\theta$.

Bevis. Dette følger direkte fra definitionen af cos og sin. □

Bemærkning 3.3. Læg mærke til at et komplekst tal har én modulus men uendeligt mange argumenter. Det skyldes, at en drejning på 360° eller 2π giver det samme punkt i planen.

Det viser sig at være meget nemmere at multiplicere to komplekse tal, når de er opskrevet på polarform. Det formuleres i følgende proposition.

Proposition 3.4. *Lad $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ og lad $z_1 = (r_1, \theta_1)$ og $z_2 = (r_2, \theta_2)$. Da er $z_1 z_2 = (r_1 r_2, \theta_1 + \theta_2)$*

Bevis. Beviset benytter faktisk intet andet end additionsformlerne for sin og cos og definition af multiplikation af to komplekse tal, Definition 2.6. Additionsformlerne for sin og cos ser ud som følger:

$$\begin{aligned} \cos(\theta_1 + \theta_2) &= \cos(\theta_1)\cos(\theta_2) - \sin(\theta_1)\sin(\theta_2), \\ \sin(\theta_1 + \theta_2) &= \cos(\theta_1)\sin(\theta_2) + \sin(\theta_1)\cos(\theta_2). \end{aligned} \tag{1}$$

Beviset for disse to formler udelades.

Vi har set, at hvis $z_1 = (r_1, \theta_1)$ og $z_2 = (r_2, \theta_2)$ er $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$ og $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$. Ved at benytte formlen for multiplikation af to komplekse tal, får man

$$\begin{aligned}
z_1 z_2 &= (r_1\cos(\theta_1)r_2\cos(\theta_2) - r_1\sin(\theta_1)r_2\sin(\theta_2)) \\
&\quad + i(r_1\cos(\theta_1)r_2\sin(\theta_2) + r_1\sin(\theta_1)r_2\cos(\theta_2)) \\
&= r_1r_2(\cos(\theta_1)\cos(\theta_2) - \sin(\theta_1)\sin(\theta_2)) \\
&\quad + ir_1r_2(\cos(\theta_1)\sin(\theta_2) + \sin(\theta_1)\cos(\theta_2)) \\
&= r_1r_2(\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)),
\end{aligned}$$

hvor vi i tredje lighedstegn har brugt additionsformlerne, formel (1), for sin og cos. Vi ser dermed, at $z_1z_2 = (r_1r_2, \theta_1 + \theta_2)$, som skulle vises. □

Eksempel 3.5. Lad $z_1 = (8, 11\pi/12)$ og $z_2 = (\frac{1}{2}, 19\pi/12)$. Hvad er z_1z_2? Vi benytter sætningen overfor og får $z_1z_2 = (4, 5\pi/2) = (4, \pi/2)$. Ved at tegne tallet i den komplekse talplan ses det at $(4, \pi/2)$ svarer til tallet $4i$. Man kunne også oversætte polarformerne til sædvanlig form og så bruge definitionen af multiplikation, men det er meget mere besværligt.

Bemærkning 3.6. Vi vil nu give en skitse af et argument for eksistens af $\mathbb{C}$.

Man identificerer det komplekse tal $x + iy$ med vektoren $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ og ser at i svarer til vektoren $(0, 1)$. Addition i $\mathbb{C}$ svarer til sædvanlig vektoraddition i planen. Ved at opskrive $z = x + iy$ og $w = a + ib$ på polarform ses det, at multiplikation også blot er en operation mellem de to tilhørende vektorer.

4 Den komplekse eksponentialfunktion

I dette afsnit udvider vi eksponentialfunktionen til de komplekse tal.

Definition 4.1. Lad $z \in \mathbb{C}$ og lad $z = x + iy$. Da er $e^z = e^x(\cos y + i\sin y)$.

Bemærkning 4.2. Hvis $z = x + i0$ er $e^z = e^x$. Det betyder, at den komplekse eksponentialfunktion er identisk med den velkendte eksponentialfunktion, hvis inputtet er et reelt tal.

Bemærkning 4.3. Hvis man lader $z = i\pi$, får man $e^{i\pi} = e^0(\cos\pi + i\sin\pi)$. Dermed har vi, at $e^{i\pi} = -1$ eller $e^{i\pi} + 1 = 0$. Denne formel kaldes Eulers identitet og den knytter på smukkeste vis tallene e, π, 1 og 0 sammen.

Vi har følgende vigtige sætning om den komplekse eksponentialfunktion.

Sætning 4.4. *Lad $z, w \in \mathbb{C}$. Da er $e^{z+w} = e^z e^w$.*

Bevis. Overlades til læseren. □

Sætning 4.5. *Den komplekse eksponentialfunktion er periodisk med periode $2\pi i$, det vil sige for alle $z \in \mathbb{C}$, er $e^z = e^{z+2\pi i}$.*

Bevis. Dette er klart, idet sin og cos er 2π periodiske. □

Bemærkning 4.6. Hvis $\theta \in \mathbb{R}$ er $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ per definition af eksponentialfunktionen. Hvis $z = (r, \theta)$ har vi set, at vi kan omskrive z, så $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$. Dermed er $z = re^{i\theta}$. Dette giver os endnu en let måde at multiplicere komplekse tal på. Hvis $z_1 = (r_1, \theta_1)$ og $z_2 = (r_2, \theta_2)$ er $z_1 z_2 = r_1 e^{i\theta_1} r_2 e^{i\theta_2} = r_1 r_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)}$. Vi har i sidste lighedstegn brugt Sætning 4.4.

Tilsidst viser vi en vigtig formel opkaldt efter den franske matematiker Abraham de Moivre.

Sætning 4.7 (de Moivres formel). *Lad* $\theta \in \mathbb{R}$ *og lad* $n \in \mathbb{N}$. *Da er*

$$(\cos(\theta) + i\sin(\theta))^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta).$$

Bevis. Per definition af den komplekse eksponentialfunktion er $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$. Ved at benytte Sætning 4.4 n gange får vi, at $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$. Dermed er $(\cos(\theta) + i\sin(\theta))^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$, som skulle vises. $\square$

Vi vil senere se en anden måde at definere den komplekse eksponentialfunktion på. Det involverer rækker, som vi vil studere i næste afsnit.

5 Følger og rækker

I dette afsnit vil vi give de vigtigste definitioner og resultater i teorien for rækker. Vi starter med en fundamental definition.

Definition 5.1. En *kompleks talfølge* består af uendeligt mange tal, der er nummererede. Talfølgen betegnes $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$, hvor $\{z_n\}_{n=1}^{\infty} = \{z_n \mid z_n \in \mathbb{C},\ n \in \mathbb{N}\}$.

Definition 5.2. En talfølge, $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$, kaldes *konvergent mod* a, hvis der gælder at

$$\forall \epsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\colon\ \forall n \in \mathbb{N}\ n > N \Rightarrow |a - z_n| < \epsilon.$$

Med andre ord er en følge konvergent, hvis der gælder, at uanset hvor lille et ϵ man kommer med, skal man kunne finde et N, så når $n > N$ ligger z_n i den åbne cirkelskive med centrum a og radius ϵ. Tallet a kaldes følgens grænseværdi.

En følge kaldes *divergent*, hvis den ikke er konvergent.

Bemærkning 5.3. Intuitivt skal man tænke på, at en følge er konvergent, hvis der gælder, at jo længere man kommer ud i 'halen' på følgen, jo tættere vil tallene ligge ved et bestemt tal nemlig følgens grænseværdi, a.

Intuitivt er en divergent følge en følge, hvor elementerne ikke nærmer sig nogen bestemt værdi, når n vokser. Det kan enten skyldes at følgens elementers norm vokser ubegrænset mod uendeligt eller, at følgens elementer hopper frem og tilbage mellem flere forskellige værdier, når n vokser.

Vi vil nu give nogle eksempler på konvergente følger. Det vil vi formulere i to propositioner.

Proposition 5.4. *Lad* $z \in \mathbb{C}$. *Følgen* $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$, $z = z_n$ *for alle* $n \in \mathbb{N}$ *er konvergent med grænseværdi* z.

Bevis. Da følgen konstant er lig z gætter vi på at følgens grænseværdi er z. Vi skal bevise at

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N}\colon \forall n \in \mathbb{N} \ n > N \Rightarrow |z - z_n| < \epsilon.$$

Lad $\epsilon > 0$ være givet. Vi ser at $|z - z_n| = |z - z| = 0$, og dermed er $|z - z_n| < \epsilon$ for alle $n \in \mathbb{N}$. $N = 1$ er dermed et brugbart N, idet $|z - z_n| < \epsilon$ for $n \geq 1$. $\square$

Proposition 5.5. *Følgen* $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$, $z_n = 1/n$ *er konvergent med grænseværdi* 0.

Bevis. Vi gætter på at følgens grænseværdi er 0. Vi skal bevise

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N}\colon \forall n \in \mathbb{N} \ n > N \Rightarrow |0 - z_n| < \epsilon.$$

Lad $\epsilon > 0$ være givet. Vi ser at $|0 - z_n| = 1/n$. Vi ser at $1/n < \epsilon$ hvis og kun hvis $n > 1/\epsilon$. Hvis vi vælger $N \in \mathbb{N}$ så $N > 1/\epsilon$ får vi et brugbart N , idet der gælder, at for $n > N$ er $n > 1/\epsilon$, og dermed er $|0 - z_n| < \epsilon$. $\square$

Bemærkning 5.6. I ovenstående bevis vælges et $N \in \mathbb{N}$, så $N > 1/\epsilon$. Sætningen, der sikrer, at det altid er muligt at vælge et sådant N, kendes under navnet Arkimedes Princip. Beviset for Arkimedes Princip er noget teknisk og udelades.

Eksempel 5.7. Eksempler på divergente følger er også ret lette at finde. Vi vil ikke studere dem nærmere, men overlade til læseren at overveje at følgerne $\{n\}_{n=1}^{\infty}$ og $\{\ln n\}_{n=1}^{\infty}$ er divergente. Man skal tænke på, at følgernes elementer vokser ubegrænset og dermed ikke kan være konvergente. Et andet eksempel på en divergent følge er $\{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty}$. Denne følge hopper frem og tilbage mellem 1 og -1 og kan således ikke være konvergent.

Nu vil vi ud fra en kompleks talfølge, $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$, konstruere en anden kompleks talfølge kaldet rækken for $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Definition 5.8. Lad $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ være en vilkårlig kompleks talfølge. Vi danner en ny talfølge $\{s_k\}_{k=1}^{\infty}$ ud fra $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ ved at definere $s_k = \sum_{n=1}^{k} z_n$. Talfølgen $\{s_k\}_{k=1}^{\infty}$ kaldes *rækken* for $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$, og rækken betegnes med $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$.

Definition 5.9. Rækken $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ kaldes konvergent eller divergent, hvis rækken $\{s_k\}_{k=1}^{\infty}$ er henholdsvis konvergent eller divergent. Hvis rækken er konvergent kaldes rækkens grænseværdi for rækkens *sum.*

Definition 5.10. En række, $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$, kaldes *absolut konvergent*, hvis rækken $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$ er konvergent.

Bemærkning 5.11. Hvis en række er absolut konvergent er den konvergent, men det omvendte er ikke altid tilfældet. Et eksempel på dette er $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(1/n)$, hvis sum er $\ln(2)$, men som ikke er absolut konvergent.

6 Berømte og vigtige eksempler på rækker

I dette afsnit vil vi betragte nogle af de vigtigste eksempler på rækker, blandt andet den komplekse eksponentialfunktion og Riemanns zeta-funktion.

Vi starter med et simpelt men vigtigt eksempel, nemlig den *geometriske række.*

Sætning 6.1. *Rækken* $\sum_{n=0}^{\infty} cz^n$ *er konvergent på mængden* $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ *med sum* $c/(1-z)$.

Bevis. Udelades. □

Vi husker at for $n \in \mathbb{N}$ er $n! = n(n-1)(n-2)\cdots 2$. Nu kan vi give en anden beskrivelse af den komplekse eksponentialfunktion.

Sætning 6.2. *Rækken*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

er absolut konvergent for alle $z \in \mathbb{C}$ *med sum* e^z.

Bevis. Udelades. □

Bemærkning 6.3. Man kan også vise, at rækkerne

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

er absolut konvergente med sum henholdsvis $\cos(z)$ og $\sin(z)$.

Bemærkning 6.4. Man kan vende argumentet om og definere funktionerne ved deres rækker. Ud fra den definitionen kan man så vise alle de velkendte egenskaber.

Tilsidst vil vi se på den måske vigtigste af alle rækker, Riemanns zeta-funktion.

Vi husker at for $r, t \in \mathbb{R}$ og $r > 0$ er $r^t = e^{t\ln(r)}$. Tilsvarende definerer vi for $n \in \mathbb{R}_+$, $s \in \mathbb{C}$ og $s = a + ib$ $n^s = n^{a+ib} = n^a e^{ib\ln(n)}$.

Definition 6.5. Lad $s \in \mathbb{C}$ med $\Re(s) > 1$. Riemanns zeta-funktion er givet ved

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}.$$

Bemærkning 6.6. Man kan vise, at ζ er konvergent for $\Re(s) > 1$. $\zeta(s)$ kan udvides til en 'pæn' funktion defineret på hele $\mathbb{C} \setminus \{1\}$. Vi vil ikke komme yderligere ind på, hvordan den første påstand bevises eller hvad 'pæn' betyder.

Den schweiziske matematiker Euler fandt følgende sammenhæng mellem primtallene og Riemanns zeta-funktion.

Sætning 6.7. *Lad* $s \in \mathbb{C}$ *med* $\Re(s) > 1$. *Lad* ζ *være Riemanns-zeta funktion. Da er*

$$\zeta(s) = \prod_{p \text{ primtal}} \frac{1}{1-p^s},$$

Bemærkning 6.8. Man er interesseret i at vide for hvilke $s \in \mathbb{C}$ $\zeta(s) = 0$. Ved at bruge lidt mere teori end vi kan give her, er det let at se, at $\zeta(s) = 0$, hvis $s \in \{\ldots, -6, -4, -2\}$. Disse nulpunkter kaldes de *trivielle* nulpunkter for ζ. Det er også rigtigt, at alle ikke trivielle nulpunkter nødvendigvis må ligge i striben $\{s \in \mathbb{C} \mid 0 \le \Re(s) \le 1\}$.

Dette leder frem til et af matematikkens helt store ubesvarede spørgsmål.

Hypotese 6.9 (Riemann hypotesen). Alle ikke trivielle nulpunkter for ζ ligger på linien $\Re(s) = \frac{1}{2}$.

Bemærkning 6.10. Clay Institute udlover 1000000$ til den, der enten viser eller modbeviser Riemann hypotesen.

Det vil have enorme konsekvenser for den moderne talteori, hvis man får afklaret, hvorvidt Riemann hypotesen er sand eller ej.

Ved hjælp af en computer har man vist at Riemann hypotesen er sand for de første 1500000000 nulpunkter. Det skal også bemærkes, at dusøren *ikke* gives, hvis man ved hjælp af en computer finder et nulpunkt, der ikke ligger på linien $\Re(s) = \frac{1}{2}$!

7 Notation

- $\forall$: for alle.
- $\exists$: eksisterer.
- $\in$: tilhører.
- $\neq$: forskellig fra.
- $\prod$ produkt.
- $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$.
- $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$.
- $\mathbb{Q} = \{a/b \mid a \in \mathbb{Z},\ b \in \mathbb{Z} \setminus 0\}$.
- $\mathbb{R}$: de reelle tal.
- $\mathbb{C}$: de komplekse tal.
- $\mathbb{R}_+ = \{x \mid x \in \mathbb{R},\ x > 0\}$.
- ϵ: det græske bogstav epsilon.
- $\Leftarrow, \Rightarrow$: medfører.
- $\iff$: hvis og kun hvis.

8 Opgaver

Opgaver mærket med ($\star$) er svære.

Øvelse 8.1. z har modulus π og argument π. Opskriv z på formen $x + iy$. Tegn z i den komplekse plan.

Øvelse 8.2. Lad $z = 1 + i$.

1. Opskriv z på polarform.
2. Beregn z^6. Skriv resultatet på formen $x + iy$.

Øvelse 8.3. Lad $z = -\sqrt{3} + i$.

1. Opskriv z på polarform.
2. Beregn z^4. Skriv resultatet på formen $x + iy$.

Øvelse 8.4. Lad $z = 1 + 2i$, $w = 2 - i$ og $v = -1 + 3i$.

1. Tegn z, w, v i den komplekse plan.
2. Beregn $1/z$, $1/w$ og $1/v$ og tegn $1/z$, $1/w$ og $1/v$ i den komplekse plan.
3. Opskriv z, w og v på polarform.
4. Beregn produktet zwv. Tegn produktet zwv i den komplekse plan.

Øvelse 8.5. Tegn mængden $\{z \in \mathbb{C} \mid z = e^{i\theta},\ \theta \in [0, 2\pi]\}$ i den komplekse talplan.

Øvelse 8.6. ($\star$) Lad $z, w \in \mathbb{C}$. Vis at $zw = 0$ hvis og kun hvis $z = 0$ eller $w = 0$. Vink til $\Rightarrow$: Hvis $s, t \in \mathbb{R}$ og $st = 0$ medfører det, at $s = 0$ eller $t = 0$. Skriv $z = x + iy$ og $w = a + ib$ og brug Definition 2.6 til at slutte det ønskede.

Øvelse 8.7. ($\star$) I denne øvelse skal vi vise Sætning 4.4. Lad $z, w \in \mathbb{C}$ og $z = x + iy$, $w = a + ib$.

1. Opskriv e^z og e^w.
2. Beregn produktet $\mathrm{e}^z\,\mathrm{e}^w$ og benyt additionsformlerne (1) for sin og cos til at vise Sætning 4.4.

Øvelse 8.8. lad D være et område i den komplekse plan givet i polære koordinater ved

$$D = \left\{(r, \theta) \mid 1 \le r \le 2,\ \frac{5\pi}{6} \le \theta \le \frac{5\pi}{3}\right\}.$$

1. Tegn området D i den komplekse plan.
2. Find de fire hjørner z_1, z_2, z_3 og z_4 i D og skriv dem på formen $re^{i\theta}$ og $x + iy$.
3. Beregn produktet $z_1 z_2 z_3 z_4$ og angiv resultatet på tegningen i (1).
4. ($\star$) Find den reelle og komplekse faktorisering af polynomiet $z^3 + 1$.
5. ($\star$) Find alle komplekse tal z, der løser ligningen $e^{3z} = -1$. Vink: Brug (4).