Kurver i planen og rummet

John Olsen

1 Indledning

Dette sæt noter er forelæsningsnoter til foredraget 'Kurver i planen og rummet'. Noterne er beregnet til at blive brugt sammen med foredraget.

Afsnit 2 er en genopfriskning af det mest basale vektorregning. Afsnit 3 og 4 er lidt generel teori om funktioner og uegentlige integraler.

I afsnit 5 gives de vigtigste definitioner fra kurveteorien, herunder definitionen af en glat, regulær kurve. I afsnit 7 definerer vi, hvad man mener med, at en kurve er parametriseret ved buelængde. Afsnit 8 handler om krumning af kurver og approksimation af kurver i planen med cirkler. Afsnit 6 behandler nogle berømte eksempler, herunder ellipsen og cykloiden.

Afsnit 10 er opgaver, der ligger i naturlig forlængelse af indholdet i noterne.

2 Vektorer

En pil i rummet svarer til en parallelforskydning af pilens startpunkt til pilens slutpunkt. Hvis to pile svarer til samme parallelforskydning kaldes pilene *ækvivalente*. Mængden af ækvivalente pile kaldes en *vektor*. Hvis man vælger et startpunkt, har man ved pilen givet en *repræsentant* for vektoren. Hvis man vælger den repræsentant, der starter i $(0, 0, 0)$, kaldes repræsentanten en *stedvektor*.

Koordinater for stedvektorens endepunkt angiver entydigt parallelforskydningen og dermed vektoren. Koordinaterne for en vektor er koordinaterne for stedvektorens endepunkt og betegnes $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$.

Addition foretages koordinatvis på repræsentanten, der er givet ved stedvektoren. Det vil sige, hvis $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ og $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ er $\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$.

Additionsoperationen er *associativ* i den forstand at $\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c}) = (\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}$. Addition af to vektorer er *kommutativ*, det vil sige, at $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$. Disse to egenskaber følger direkte fra definitionen af addition og fra den tilsvarende egenskab for reelle tal. Nulvektoren er *additivt neutralelement*, idet $\vec{a} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{a} = \vec{a}$.

Man kan også multiplicere en vektor med en konstant $k \in \mathbb{R}$. Geometrisk betyder det, at man forkorter eller forlænger vektorens længde med konstanten k, men at retningen forbliver uændret. Multiplikation af en vektor med k foretages koordinatvis på repræsentanten, der er givet ved stedvektoren. Det vil sige, for $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ er $k\vec{a} = k(a_1, a_2, a_3) = (ka_1, ka_2, ka_3)$.

Multiplikation med en konstant er *kommutativ*, det vil sige at $k\vec{a} = \vec{a}k$. Multiplikation med konstanter er også *associativ*, det vil sige, at $r(s\vec{a}) = (rs)\vec{a}$ for $r, s \in \mathbb{R}$. At disse to regler gælder ses direkte fra definitionen af multiplikation og fra den tilsvarende egenskab for reelle tal. Da $1\vec{a} = \vec{a}1 = \vec{a}$, er 1 det *multiplikative neutralelement*.

Addition og multiplikation med en konstant er *distributiv* i følgende forstand. Lad $k, c \in$

$\mathbb{R}$. Da er

$$r(\vec{a}+\vec{b}) = r\vec{a}+r\vec{b},$$
$$(r+s)\vec{a} = r\vec{a}+s\vec{a}.$$

Dette følger også direkte fra definitionerne og fra de tilsvarende egenskaber for reelle tal.

Når man har addition og skalering definerer man subtraktion ved, at man adderer $\vec{a}$ med $-\vec{b}$. Det vil sige, at $\vec{a}-\vec{b} = \vec{a}+(-\vec{b})$. $-\vec{a}$ kaldes det *additive inverselement* til $\vec{a}$.

Længden af en vektor fås fra Pythagoras sætning. Det vil sige, at

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}.$$

Formlen er let at forstå, hvis man tegner stedvektoren i et koordinatsystem.

Bemærkning 2.1. På præcis tilsvarende vis defineres vektorer i planen. I planen er koordinaterne for en vektor givet ved $\vec{a} = (a_1, a_2)$. Længden af en vektor i planen er $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2+a_2^2}$.

3 Funktioner

Vi har brug for at udvide det sædvanlige funktionsbegreb en lille smule. Lad $I \subseteq \mathbb{R}$ være et interval, eventuelt $\mathbb{R}$. Hvis I er et interval, lader vi $\mathrm{Indre}(I)$ betegne det indre af I, det vil sige, hvis $I = [a, b]$ er $\mathrm{Indre}(I)$ lig det åbne interval (a, b). Hvis I er åben, er $\mathrm{Indre}(I) = I$.

Definition 3.1. $f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ er en funktion, der til et $t \in I$ giver en vektor i $\mathbb{R}^3$. For $x, y, z\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ er f givet ved

$$f(t) = (x(t), y(t), z(t)).$$

Vi siger, at f er kontinuert på I, hvis x, y, z er kontinuerte på I. Ligeledes er f differentiabel på I, hvis x, y, z er differentiable på I. $f'(t)$ bliver en vektor nemlig $f'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$. Vi siger, at f er uendelig ofte differentiabel, eller *glat*, på I, hvis

$$\frac{d^n x(t)}{dt^n}, \quad \frac{d^n y(t)}{dt^n}, \quad \frac{d^n z(t)}{dt^n}$$

eksisterer for alle $n \in \mathbb{N}$ og $\forall t \in I$.

Hvis I er lukket, er f differentiabel eller glat på I, hvis den er differentiabel eller glat på $\mathrm{Indre}(I)$.

Bemærkning 3.2. Definitionen af en funktion $f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ er helt tilsvarende, blot bliver funktionsværdierne vektorer i $\mathbb{R}^2$. Kontinuitet og differentiabilitet defineres præcis som for funktioner $f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}^3$.

4 Integration

Hvis $[a, b]$ er et begrænset interval, kender vi udtrykket $\int_a^b f(t)dt$. Vi ønsker at indføre integralet af en funktion f over et ubegrænset interval eller over hele den reelle akse. Vi definerer det *uegentlige integral* af f over $\mathbb{R}$, $I_1 = [a, \infty)$ og $I_2 = (-\infty, b]$, hvor $a, b \in \mathbb{R}$ således.

Definition 4.1. Lad $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ være en kontinuert funktion. Integralet af f over $\mathbb{R}, I_1, I_2$ er defineret ved

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt = \lim_{K_1,K_2 \longrightarrow \infty} \int_{-K_1}^{0} f(t)dt + \int_{0}^{K_2} f(t)dt$$
$$\int_{a}^{\infty} f(t)dt = \lim_{K \longrightarrow \infty} \int_{a}^{K} f(t)dt$$
$$\int_{-\infty}^{b} f(t)dt = \lim_{K \longrightarrow \infty} \int_{-K}^{b} f(t)dt.$$

Hvis grænseværdien er endelig, siges integralet at *konvergere*. Hvis grænseværdien er uendelig, siges integralet at *divergere*. Hvis $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt$ er konvergent er $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt = \lim_{K \longrightarrow \infty} \int_{-K}^{K} f(t)dt$.

Man skal stadig opfatte de uegentlige integraler af f som arealet under grafen for f.

Eksempel 4.2. Lad $f\colon (1, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ være givet ved $f(t) = 1/t$.

$$\int_{1}^{\infty} \frac{1}{t} dt = \lim_{K \longrightarrow \infty} \int_{1}^{K} \frac{1}{t} dt = \lim_{K \longrightarrow \infty} [\ln(t)]_1^K = \infty.$$

Det vil sige, at $\int_1^{\infty} (1/t)dt$ er divergent.

Eksempel 4.3. Lad $f\colon (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ være givet ved $f(t) = e^{-t}$.

$$\int_{0}^{\infty} e^{-t} dt = \lim_{K \longrightarrow \infty} \int_{0}^{K} e^{-t} dt = \lim_{K \longrightarrow \infty} [-e^{-t}]_0^K = 1$$

Det vil sige, at $\int_0^{\infty} e^{-t} dt$ er konvergent og har værdien 1 (areal 1 under grafen).

5 Kurver

Vi begynder med en fundamental definition. Lad I være et lukket interval eller $\mathbb{R}$.

Definition 5.1. En *parametriseret, glat kurve*, eller blot en *glat kurve* i $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$ er en funktion $\alpha\colon I \longrightarrow \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$, der er glat.

For en kurve $\alpha(t)$ kaldes I parameterintervallet for α og t parameteren for α.

Bemærkning 5.2. Inspireret af fysisk terminologi kaldes vektoren $\alpha'(t)$ hastighedsvektoren og $\alpha''(t)$ kaldes accelerationsvektoren.

Definition 5.3. En glat kurve $\alpha(t)$ er *regulær*, hvis $\alpha'(t) \neq 0$ for alle $t \in \mathrm{Indre}(I)$.

Definition 5.4. Lad α være en glat, regulær kurve. *Buelængden* af α fra s_0 til s er $s(s) = \int_{s_0}^{s} |\alpha'(t)| dt$.

Eksempel 5.5. Lad $\alpha(t) = (\cos(t), \sin(t))$, $t \in [0, 2\pi]$ være enhedscirklen i $\mathbb{R}^2$. α er en glat kurve, da sin og cos er uendelig ofte differentiable funktioner. α er regulær, da $\alpha'(t) = (-\sin(t), \cos(t)) \neq 0$ for alle $t \in [0, 2\pi]$.

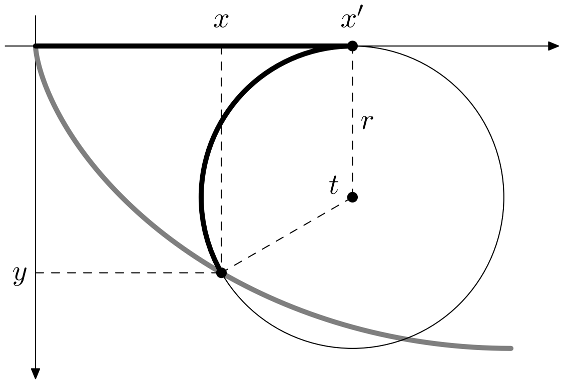
6 Berømte eksempler

Vi vil nu betragte nogle berømte eksempler på kurver. Den første kurve vi vil betragte er *cykloiden.*

I 1600-tallet var der en bitter strid mellem matematikere på fastlandet og de engelske matematikere om, hvem der havde opfundet differential- og integralregningen, Newton eller Leibniz. De fik begge følgende opgave de skulle løse (Brachistoproblemet): Givet to punkter A og B. Find den kurve hvorpå en kugle, der ruller uden modstand, kommer hurtigst fra A til B. Løsningen er kurven

$$\alpha(t) = r(t - \sin(t), 1 - \cos(t)),\ t \in \mathbb{R} \quad \text{(Cykloiden)}.$$

Geometrisk fremkommer kurven ved at rulle et cykelhjul af radius r henover en plan overflade. Ventilen vil da følge en cykloidebane.



Cykloiden.

Begge løste problemet; Newton imponerede ved at løse det på 12 timer!

Vi har følgende sætning om cykloiden.

Sætning 6.1. *Cykloiden*

1. *er en glat kurve.*
2. *er løsning til Brachistoproblemet.*
3. *er Tautokron. Det vil sige, at ligegyldigt hvor på kurven kuglen starter tager det lige lang tid for kuglen at komme til bunden.*
4. *har buelængden* $8r$ *for en hel omdrejning af hjulet.*
5. *er regulær for* $t \neq 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Bevis.
(1) Er oplagt.
(2) Kræver, at man kender til den gren af matematikken, der hedder variationsregning. Det vil føre for vidt at komme ind på det her.

(3) Udelades.
(4) Vi har at $\alpha'(t) = r(1 - \cos(t), \sin(t))$. Vi regner på $|\alpha'(t)|$ og får at

$$\begin{aligned}
|\alpha'(t)| &= \sqrt{(r^2((1-\cos(t))^2 + \sin^2(t)))} \\
&= r\sqrt{(1-\cos(t))^2 + \sin^2(t)} \\
&= r\sqrt{1 + \cos^2(t) + \sin^2(t) - 2\cos(t)} \\
&= r\sqrt{2 - 2\cos(t)} \\
&= r\sqrt{2(1-\cos(t))} \\
&= 2r|\sin(t/2)|.
\end{aligned}$$

I sidste lighedstegn er der brugt følgende trigonometriske identitet,

$$\sqrt{\frac{1-\cos(t)}{2}} = |\sin(t/2)|.$$

Per definition af buelængden har vi

$$s = \int_0^{2\pi} |\alpha'(t)|dt = 2r\int_0^{2\pi} |\sin(t/2)|dt = 4r\int_0^{\pi} \sin(t/2)dt = 8r.$$

(5) Det ses af ligningen $|\alpha'(t)| = 2r|\sin(t/2)|$, at α er regulær for $t \neq 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. □

Et andet berømt og illustrativt eksempel er den *logaritmiske spiral.* Den logaritmiske spiral er en kurve $\alpha\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$, der er givet ved

$$\alpha(t) = (e^{-t}\cos(t), e^{-t}\sin(t))$$

Geometrisk skal man forestille sig en cirkel hvis radius bliver mindre, når t vokser. Den spirallerer omkring $(0,0)$. Vi har følgende sætning om den logaritmiske spiral.

Sætning 6.2. *Lad α være den logaritmiske spiral. Da gælder*

1. *α er en glat og regulær kurve,*
2. *$\alpha(0) = (1,0)$ og $\alpha(t) \longrightarrow (0,0)$ for $t \longrightarrow \infty$,*
3. *$\int_0^\infty |\alpha'(t)|dt < \infty$.*

Bevis.
(1) Det er klart, at α er en glat kurve. At α er regulær følger af denne udregning. Ved at benytte produktreglen for differentiation fås

$$\alpha'(t) = (-e^{-t}(\cos(t) + \sin(t)), e^{-t}(\cos(t) - \sin(t))),$$

der er forskellig fra 0 for alle t.
(2) At $\alpha(0) = (1,0)$ er oplagt. For at se at $\alpha(t) \longrightarrow (0,0)$ for $t \longrightarrow \infty$, er det nok at se, at $e^{-t} \longrightarrow 0$ for $t \longrightarrow \infty$ og, både $|\sin(t)|$ og $|\cos(t)|$ er begrænset af 1 for alle $t \in \mathbb{R}$.
(3) Her benytter vi først beregningen af $\alpha'(t)$ ovenfor til at beregne $|\alpha'(t)|$. Vi får

$$\begin{aligned}
|\alpha'(t)|^2 &= e^{-2t}(\cos(t) + \sin(t))^2 + e^{-2t}(\cos(t) - \sin(t))^2 \\
&= e^{-2t}(\cos^2(t) + \sin^2(t) + 2\cos(t)\sin(t)) \\
&\quad + e^{-2t}(\cos^2(t) + \sin^2(t) - 2\cos(t)\sin(t)) \\
&= 2e^{-2t}.
\end{aligned}$$

Hvilket giver

$$|\alpha'(t)| = \sqrt{2e^{-2t}} = \sqrt{2}\, e^{-t}.$$

Per definition af det uegentlige integral har vi

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty |\alpha'(t)| dt &= \lim_{t \longrightarrow \infty} \int_0^t |\alpha'(t)| dt \\
&= \lim_{t \longrightarrow \infty} \sqrt{2} \int_0^t e^{-t} dt \\
&= \sqrt{2} \lim_{t \longrightarrow \infty} [-e^{-t}]_0^t \\
&= \sqrt{2} (\lim_{t \longrightarrow \infty} - e^{-t} + 1) \\
&= \sqrt{2}.
\end{aligned}$$

□

Bemærkning 6.3. Den logaritmiske spiral er et eksempel på, at en kurve, der er defineret på et uendeligt parameterinterval, her $(0, \infty)$, kan have endelig buelængde.

Det tredje berømte eksempel, vi vil betragte, er *ellipsen.* En ellipse er givet ved $\alpha(t) = (a\cos(t), b\sin(t))$, $a, b \neq 0$ og $t \in [0, 2\pi]$. Vi har følgende sætning om ellipsen.

Sætning 6.4. *Lad α være en ellipse. Da er*

1. *α en glat og regulær kurve,*
2. *buelængden af α $\int_0^{2\pi} \sqrt{a^2(-\sin(t))^2 + b^2\cos^2(t)}\, dt$*

Bevis. Både (1) og (2) følger direkte fra definitionerne. □

Bemærkning 6.5. Hvad der ikke er så oplagt er, at man ikke kan beregne integralet i sætning 6.4 med mindre $a = b$, det vil sige, at ellipsen er en cirkel. Integralet hører under den klasse af integraler, man kalder elliptiske integraler, og man kan faktisk vise, at man ikke eksplicit kan nedskrive en stamfunktion for et sådant integral!

7 Kurver parametriseret ved buelængde

Definition 7.1. Lad α være en glat, regulær kurve. α siges at være *parametriseret ved buelængde*, hvis $s(t) = t - t_0$.

Lemma 7.2. *Lad α være en glat, regulær kurve. α er parametriseret ved buelængde hvis og kun hvis $|\alpha'(t)| \equiv 1$.*

Bevis. $\Rightarrow$: Antag, at α er parametriseret ved buelængde, da er $s(s) = \int_{s_0}^s |\alpha'(t)| dt = s - s_0$ per definition. Men det medfører, at $|\alpha'(t)| \equiv 1$.

$\Leftarrow$: Antag, at $|\alpha'(t)| \equiv 1$, da er $\int_{s_0}^s |\alpha'(t)| dt = \int_{s_0}^s 1 dt = s - s_0$, og α er parametriseret ved buelængde. □

Bemærkning 7.3. Geometrisk kan man fortolke parametrisering ved buelængde som følger. Betragt en cykelrytter, der cykler. Hvis der er maling på fordækket, vil det give en glat og regulær kurve (overvej!) på vejen, det vil sige sted på vejen som funktion af tiden. Hvis vi siger, at længdeenheden er $1m$ og tidsenheden er $1s$, ses det fra ligheden $s(t) = t - t_0$ at, hvis cykelrytteren skal følge en kurve, der er parametriseret ved buelængde, skal han i tidsrummet $(t - t_0)s$ have kørt præcis $(t - t_0)m$. Af lemma 7.2 fremgår det, at det kun kan lade sig gøre, hvis cykelrytteren kører med konstant fart $1m/s$.

Eksempel 7.4. Eksempler på kurver, der er parametriseret ved buelængde er ikke svære at konstruere. Fx er linjer som $\alpha(t) = (k, t)$ og $\alpha(t) = (t, l)$, hvor $t \in \mathbb{R}$ og, hvor $k, l \in \mathbb{R}$ er konstanter, parametriseret ved buelængde.

Et andet godt eksempel er cirklen $\alpha(t) = (\cos(t), \sin(t))$, $t \in [0, 2\pi]$, der også er parametriseret ved buelængde, idet $|\alpha'(t)| = \sqrt{(-\sin(t))^2 + \cos^2(t)} = \sqrt{1} = 1$. Geometrisk kan man forstå det således: Hvis vi går rundt på enhedscirklen, angiver en t-værdi mellem 0 og 2π, hvilken vinkel vi danner med den positive 1.-akse, dvs vi ved hvor på cirklen vi er. Samtidigt angiver t-værdien også, hvor langt vi er gået, hvis vi startede i $(1, 0)$.

Eksempel 7.5. Et simpelt eksempel på en kurve der ikke er parametriseret ved buelængde er $\alpha(t) = (t, t^2)$, $t \in \mathbb{R}$. Dette ses ved en direkte udregning.

Vi har faktisk allerede set et eksempel på en kurve, der ikke er parametriseret ved buelængde. Den logaritmiske spiral fra sætning 6.2 opfylder ikke at $s(t) = t - t_0$ og er dermed ikke parametriseret ved buelængde.

Det fremgår af følgende sætning, at det ikke er nogen indskrænkning kun at kigge på kurver, der er parametriseret ved buelængde.

Sætning 7.6. *Lad $\alpha\colon I \longrightarrow \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$ være en glat, regulær kurve. Da eksisterer der en glat, regulær kurve $\beta\colon J \longrightarrow \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$, der er parametriseret ved buelængde, så de to kurver har det samme billede, $\alpha(I) = \beta(J)$. β kaldes reparametriseringen ved buelængde af α.*

Bevis. Udelades. □

Eksempel 7.7. Lad $\alpha\colon [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ være givet ved $\alpha(t) = (a_1 t + v_1, a_2 t + v_2)$. Det ses, at $\alpha'(t) = (a_1, a_2)$. Buelængden af α fra 0 til s er givet ved $s(s) = \int_0^s \sqrt{a_1^2 + a_2^2}\,dt = s\sqrt{a_1^2 + a_2^2}$. Hvis konstanten $\sqrt{a_1^2 + a_2^2}$ ikke havde været der, ville α være parametriseret ved buelængde. Vi ønsker at finde en reparametrisering ved buelængde af α.

Inspireret af beregningerne ovenfor definerer vi en kurve $\beta\colon [0, \sqrt{a_1^2 + a_2^2}\,] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ ved

$$\beta(t) = \left(\frac{a_1}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}} t + v_1, \frac{a_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}} t + v_2 \right).$$

Vi skal nu vise, at β er parametriseret ved buelængde. Først beregner vi $\beta'(t)$.

$$\beta'(t) = \left(\frac{a_1}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}}, \frac{a_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}} \right).$$

Dernæst ses det, at

$$s(s) = \int_0^s \sqrt{\frac{a_1^2}{a_1^2 + a_2^2} + \frac{a_2^2}{a_1^2 + a_2^2}}\,dt = s\sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2}{a_1^2 + a_2^2}} = s.$$

Det vil sige, at β er parametriseret ved buelængde.

Idet $\alpha(0) = \beta(0)$ og $\alpha(1) = \beta(\sqrt{a_1^2 + a_2^2})$ og begge kurver er rette linjer i $\mathbb{R}^2$, har de to kurver det samme billede i $\mathbb{R}^2$. Da β er parametriseret ved buelængde, er β reparametriseringen ved buelængde af α.

8 Krumning af plane kurver

Vi starter med en vigtig definition.

Definition 8.1. Lad α være en glat kurve i $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$, der er parametriseret ved buelængde. $|\alpha''(t)| = k_\alpha(t)$ kaldes krumningen af α i t.

Bemærkning 8.2. Geometrisk er krumningen af en kurve et mål for, hvor hurtigt kurven bevæger sig væk fra sin tangentvektor i det pågældende punkt.

Eksempel 8.3. Lad $\alpha(t) = (r\cos(t/r), r\sin(t/r))$, $t \in [0, 2\pi r]$ være cirklen med radius r parametriseret ved buelængde. En simpel beregning giver,

$$\alpha'(t) = \left(\frac{-r}{r}\sin(t/r), \frac{r}{r}\cos(t/r)\right),$$
$$\alpha''(t) = \left(\frac{-1}{r}\cos(t/r), \frac{-1}{r}\sin(t/r)\right).$$

Ved at benytte idiotformlen får man, at $|\alpha''(t)| = 1/r = k_\alpha(t)$. Det ses, at jo større r er, jo mindre er krumningen.

Vi har følgende sætning om krumning af rette linjer, der stemmer fint med den geometriske fortolkning af krumningen i bemærkning 8.2.

Sætning 8.4. *Lad α være en glat kurve i $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$, der er parametriseret ved buelængde. Da er $|\alpha''(t)| \equiv 0$ hvis og kun hvis α er en ret linje.*

Bevis. Først ser vi, at $|\alpha''(t)| \equiv 0$ hvis og kun hvis $\alpha''(t) \equiv 0$. Vi viser sætningen, hvis α er en kurve i $\mathbb{R}^2$. Beviset er tilsvarende, hvis α er en kurve i $\mathbb{R}^3$.

$\Rightarrow$: Antag, at $|\alpha''(t)| \equiv 0$. Integration en gang giver $\alpha'(t) = (a_1, a_2)$, hvor $\sqrt{a_1^2 + a_2^2} = 1$, da α skal være parametriseret ved buelængde. Integration endnu en gang giver $\alpha(t) = (a_1 t + v_1, a_2 t + v_2)$, der jo er en ret linje i $\mathbb{R}^2$.

$\Leftarrow$: Antag, at α er en ret linje parametriseret ved buelængde, det vil sige $\alpha(t) = (a_1 t + v_1, a_2 t + v_2)$, hvor $\sqrt{a_1^2 + a_2^2} = 1$. Ved at differentiere α ser man, at $\alpha'(t) = (a_1, a_2)$. Differentiation endnu engang giver at $\alpha''(t) \equiv 0$. $\square$

Ganske som man kan approksimere en funktion $f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ med det approksimerende førstegradspolynomium, kan man approksimere kurver i planen med cirkler. Inspireret af eksempel 8.3 laver vi følgende definition.

Definition 8.5. Lad α være en glat, regulær kurve i $\mathbb{R}^2$, der er parametriseret ved buelængde. Den *bedste approksimation* for α i punktet t_0 er en cirkel $\beta(t)$ med radius $1/k_\alpha(t_0)$, hvor $\beta(t_0) = \alpha(t_0)$, og hvor $\beta'(t_0) = \alpha'(t_0)$.

Hvis $k_\alpha(t_0) = 0$, er den bedste aproksimation for α en cirkel gennem $\alpha(t_0)$ med uendelig radius.

Bemærkning 8.6. Man skal ved en geometrisk betragtning, eventuelt en tegning, sikre sig, at centrum kommer til at ligge på den rigtige side af kurven, man ønsker at approksimere.

Eksempel 8.7. Den bedste approksimation for α, hvis α er en ret linje, er en cirkel med uendelig radius, da $k_\alpha(t) = 0$. Den bedste approksimation for α, hvis α er en cirkel, er naturligvis en cirkel med samme krumning, der går gennem punktet $\alpha(t_0)$. Det følger fra formlen for en cirkel, at de to cirkler har samme centrum.

9 Notation

Vi giver en kort liste over den mest udbredte notation. Håbet er, at det øger læsevenligheden.

- $\forall$: for alle.
- $\in$: tilhører.
- $\neq$: forskellig fra.
- $\mathbb{R}$: de reelle tal.
- $\equiv$: identisk lig med.
- $\Leftarrow, \Rightarrow$: medfører.
- $\iff$: hvis og kun hvis.

10 Øvelser

Herunder følger fire øvelser, der alle har tilknytning til stoffet beskrevet på de foregående sider.

Øvelse 10.1. Lad $\alpha\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ være givet ved

$$\alpha(t) = (a\cos(t), a\sin(t), bt), \quad a, b \neq 0 \quad \text{(Helix)}.$$

1. Gør rede for at α er en glat og regulær kurve.
2. Beregn buelængden af α for $t \in [t_1, t_2]$.
3. Lad $\beta\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ være givet ved $\beta(t) = (a\cos(t/c), a\sin(t/c), bt/c)$, hvor $a, b \neq 0$ og $c^2 = a^2 + b^2$. Vis, at β er en reparametrisering ved buelængde af α.
4. Beregn krumningen af β.

Øvelse 10.2. Lad $\alpha\colon [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ være givet ved

$$\alpha(t) = (a\cos^3(t), a\sin^3(t)) \quad \text{(Astroide)}.$$

1. Gør rede for om α er en glat og regulær kurve.
2. Tegn α når $t \in [0, \pi/2]$ (helst uden lommeregner). Gæt på hvordan resten kommer til at se ud ved hjælp af symmetribetragtninger.

Øvelse 10.3. Lad $\alpha\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ være givet ved

$$\alpha(t) = (t^3 + 4, -(t^3 + 4)).$$

1. Gør rede for at α er en glat kurve.
2. Er α regulær? Argumenter.
3. Beregn buelængden af α når $t \in [t_1, t_2]$.